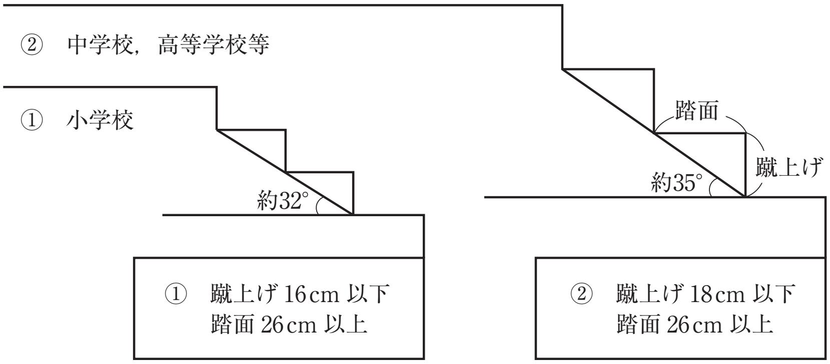
第３講　図形と計量

1 〔1〕 久しぶりに小学校に行くと，階段の一段一段の高さが低く感じられることがある。これは，小学校と高等学校とでは階段の基準が異なるからである。学校の階段の基準は，下のように建築基準法によって定められている。

高等学校の階段では，蹴上(けあ)げが 18 cm 以下，踏面(ふみづら)が 26 cm 以上となっており，この基準では，傾斜は最大で約 35° である。

【建築基準法による階段の基準】

＊下の図は，階段の傾斜が基準内で最大のときを表している。



階段の傾斜をちょうど 33° とするとき，蹴上げを 18 cm 以下にするためには，踏面をどのような範囲に設定すればよいか。踏面を x cm として，x のとり得る値の範囲を求めるための不等式を，33° の三角比と x を用いて表せ。ただし，踏面と蹴上げの長さはそれぞれ一定であるとし，また，踏面は水平であり，蹴上げは踏面に対して垂直であるとする。

(本問題の図は，「建築基準法の階段に係る基準について」(国土交通省)をもとに作成している。)

< NOTE >

〔2〕 三角形ABCの外接円をOとし，円Oの半径をRとする。辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cとし，∠CAB，∠ABC，∠BCAの大きさをそれぞれA，B，Cとする。

太郎さんと花子さんは三角形ABCについて

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\cdots(*)$$

の関係が成り立つことを知り，その理由について，まず直角三角形の場合を次のように考察した。

$C=90°$のとき，円周角の定理より，線分ABは円Oの直径である。

よって，

$$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{a}{2R}$$

であるから，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

となる。

同様にして，

$$\frac{b}{\sin B}=2R$$

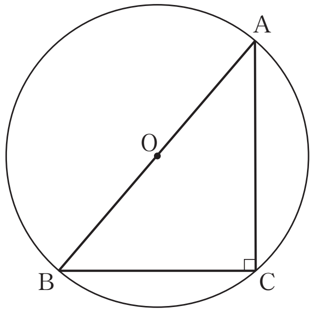
である。

また，$\sin C=1$なので，

$$\frac{c}{\sin C}=\mathrm{AB}=2R$$

である。

よって，$C=90°$のとき$(*)$の関係が成り立つ。



次に，太郎さんと花子さんは，三角形ABCが鋭角三角形や鈍角三角形のときにも$(*)$の関係が成り立つことを証明しようとしている。

(1〔2〕は次ページに続く。)

(1) 三角形 ABC が鋭角三角形の場合についても(＊)の関係が成り立つことは，直角三角形の場合に(＊)の関係が成り立つことをもとにして，次のような太郎さんの構想により証明できる。

太郎さんの証明の構想

点 A を含む弧 BC 上に点 A′ をとると，円周角の定理より

$\angle \mathrm{CAB} = \angle \mathrm{CA'B}$

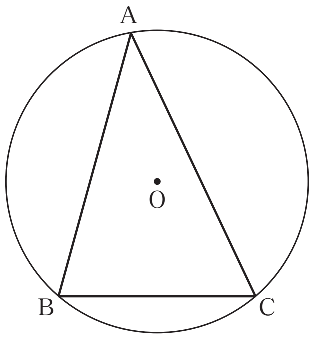
が成り立つ。

特に，[ア] を点 A′ とし，三角形 A′BC に対して $C=90^\circ$ の場合の考察の結果を利用すれば，

$$\frac{a}{\sin A}=2R$$

が成り立つことを証明できる。

$\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ についても同様に証明できる。



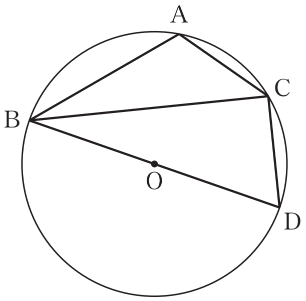
[ア] に当てはまる最も適当なものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪ 点 B から辺 AC に下ろした垂線と，円 O との交点のうち点 B と異なる点
① 直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点
② 点 B を中心とし点 C を通る円と，円 O との交点のうち点 C と異なる点
③ 点 O を通り辺 BC に平行な直線と，円 O との交点のうちの一つ
④ 辺 BC と直交する円 O の直径と，円 O との交点のうちの一つ

(1〔2〕は次ページに続く。)

(2)　三角形 ABC が $A > 90^\circ$ である鈍角三角形の場合についても $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つことは，次のような花子さんの構想により証明できる。

花子さんの証明の構想



右図のように，線分 BD が円 O の直径となるように点 D をとると，三角形 BCD において

$$\sin \boxed{\text{イ}} = \frac{a}{2R}$$

である。

このとき，四角形 ABDC は円 O に内接するから，

$$\angle \text{CAB} = \boxed{\text{ウ}}$$

であり，

$$\sin \angle \text{CAB} = \sin\left(\boxed{\text{ウ}}\right) = \sin \boxed{\text{イ}}$$

となることを用いる。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

$\boxed{\text{イ}}$ **の解答群**

⓪ $\angle$ABC	① $\angle$ABD	② $\angle$ACB	③ $\angle$ACD
④ $\angle$BCD	⑤ $\angle$BDC	⑥ $\angle$CBD	

$\boxed{\text{ウ}}$ **の解答群**

⓪ $90^\circ + \angle$ABC	① $180^\circ - \angle$ABC
② $90^\circ + \angle$ACB	③ $180^\circ - \angle$ACB
④ $90^\circ + \angle$BDC	⑤ $180^\circ - \angle$BDC
⑥ $90^\circ + \angle$ABD	⑦ $180^\circ - \angle$CBD

＜ NOTE ＞

2　$\angle ACB=90^\circ$ である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P，Q，R がある。点 P，Q，R は，次の規則に従って移動する。

- 最初，点 P，Q，R はそれぞれ点 A，B，C の位置にあり，点 P，Q，R は同時刻に移動を開始する。
- 点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく，一定の速さで移動する。ただし，点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
- 点 P，Q，R は，それぞれ点 C，A，B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

(1)　図 1 の直角三角形 ABC を考える。

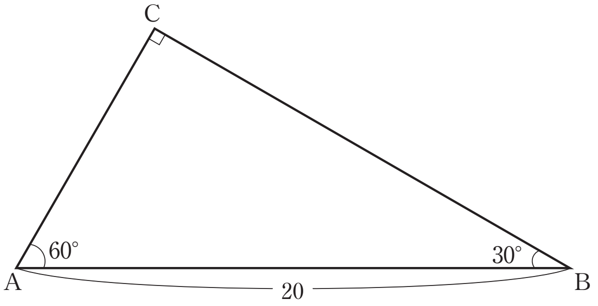


図 1

(i)　各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めよ。

PQ＝ **ア** $\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}$，S＝ **エ** $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$

（2は次ページに続く。）

(ii)　各点が移動する間の線分 PR の長さとして，とり得ない値，一回だけとり得る値，二回だけとり得る値を，次の⓪～④のうちからそれぞれ**すべて選べ**。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとする。

とり得ない値　[カ]
一回だけとり得る値　[キ]
二回だけとり得る値　[ク]

⓪ $5\sqrt{2}$　① $5\sqrt{3}$　② $4\sqrt{5}$　③ 10　④ $10\sqrt{3}$

(iii)　各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。各時刻における S_1，S_2，S_3 の間の大小関係と，その大小関係が時刻とともにどのように変化するかを答えよ。

(2)　直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めよ。

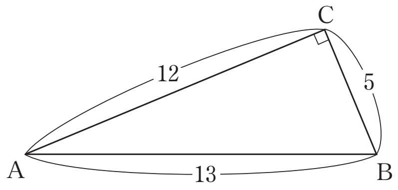


図 2

$\dfrac{[ケコ] \pm [サ]\sqrt{[シ]}}{[ス]}$ 秒後

3 以下の問題では，△ABC に対して，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C で表すものとする。

ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次のような宿題が出された。

> **宿題** △ABC において $A=60^\circ$ であるとする。このとき，
>
> $$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$$
>
> の値について調べなさい。

放課後，太郎さんと花子さんは出された宿題について会話をした。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

（3は次ページに続く。）

> 太郎：A は $60°$ だけど，B も C も分からないから，方針が立たないよ。
>
> 花子：まずは，具体的に一つ例を作って考えてみようよ。もし $B=90°$ であるとすると，$\cos B=$ ［ア］，$\sin C=$ ［イ］ だね。だから，この場合の X の値を計算すると 1 になるね。

(1) ［ア］，［イ］ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

（③は次ページに続く。）

太郎：$B=13^\circ$ にしてみよう。数学の教科書に三角比の表があるから，それを見ると，$\cos B=0.9744$ で，$\sin C$ は……あれっ？　表には 0° から 90° までの三角比の値しか載っていないから分からないね。

花子：そういうときは，[ウ] という関係を利用したらいいよ。この関係を使うと，教科書の三角比の表から $\sin C=$ [エ] だと分かるよ。

太郎：じゃあ，この場合の X の値を電卓を使って計算してみよう。$\sqrt{3}$ は 1.732 として計算すると……あれっ？　ぴったりにはならなかったけど，小数第4位を四捨五入すると，X は 1.000 になったよ！
(a)これで，$A=60^\circ$，$B=13^\circ$ のときに $X=1$ になることが証明できたことになるね。さらに，(b)「$A=60^\circ$ ならば $X=1$」という命題が真であると証明できたね。

花子：本当にそうなのかな？

(2) [ウ]，[エ] に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

[ウ] の解答群：

⓪ $\sin(90^\circ-\theta)=\sin\theta$	① $\sin(90^\circ-\theta)=-\sin\theta$
② $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$	③ $\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$
④ $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$	⑤ $\sin(180^\circ-\theta)=-\sin\theta$
⑥ $\sin(180^\circ-\theta)=\cos\theta$	⑦ $\sin(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$

[エ] の解答群：

⓪ -3.2709	① -0.9563	② 0.9563	③ 3.2709

（3は次ページに続く。）

(3)　太郎さんが言った下線部(a), (b)について，その正誤の組合せとして正しいものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 **オ**

⓪　下線部(a)，(b)ともに正しい。

①　下線部(a)は正しいが，(b)は誤りである。

②　下線部(a)は誤りであるが，(b)は正しい。

③　下線部(a)，(b)ともに誤りである。

> 花子：$A=60^\circ$ ならば $X=1$ となるかどうかを，数式を使って考えてみようよ。
> 　　　△ABC の外接円の半径を R とするね。すると，$A=60^\circ$ だから，
> 　　　$\mathrm{BC}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,R$ になるね。
> 太郎：$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}$，$\mathrm{AC}=\boxed{\text{ク}}$ になるよ。

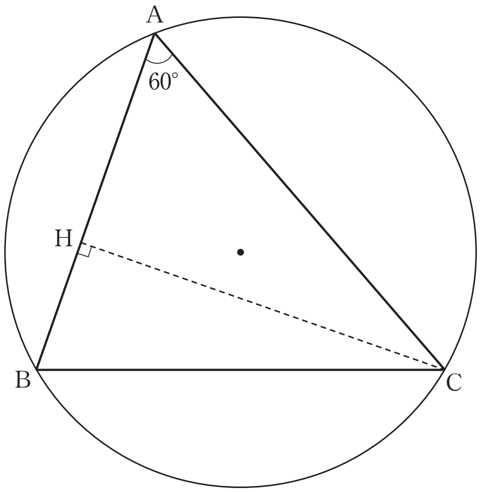
(4)　**カ** に当てはまる数を答えよ。また，**キ**，**ク** に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　$R\sin B$	①　$2R\sin B$	②　$R\cos B$	③　$2R\cos B$
④　$R\sin C$	⑤　$2R\sin C$	⑥　$R\cos C$	⑦　$2R\cos C$

（3は次ページに続く。）

花子：まず，B が鋭角の場合を考えてみたよ。

〈花子さんのノート〉



点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと

$\text{AH}=\underline{\text{AC}\cos 60^\circ}_{①}$

$\text{BH}=\underline{\text{BC}\cos B}_{②}$

である。AB を AH，BH を用いて表すと

$\text{AB}=\underline{\text{AH}+\text{BH}}_{③}$

であるから，

$\underline{\text{AB}=\boxed{\text{ケ}}\sin B+\boxed{\text{コ}}\cos B}_{④}$

が得られる。

太郎：さっき，AB＝$\boxed{\text{キ}}$ と求めたから，④の式とあわせると，$X=1$ となることが証明できたよ。

花子：B が直角のときは，すでに $X=1$ となることを計算したね。

(c)$\underline{B\text{ が鈍角のときは，証明を少し変えれば}}$，やはり $X=1$ であることが示せるね。

（3は次ページに続く。）

(5) [ケ], [コ] に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\frac{1}{2}R$　① $\frac{\sqrt{2}}{2}R$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}R$　③ R　④ $\sqrt{2}R$

⑤ $\sqrt{3}R$　⑥ $2R$　⑦ $2\sqrt{2}R$　⑧ $2\sqrt{3}R$

(6) 下線部(c)について，B が鈍角のときには下線部①～③の式のうち修正が必要なものがある。修正が必要な番号についてのみ，修正した式をそれぞれ答えよ。

> 花子：今まではずっと $A=60°$ の場合を考えてきたんだけど，$A=120°$ で $B=30°$ の場合を考えてみたよ。$\sin B$ と $\cos C$ の値を求めて，X の値を計算したら，この場合にも 1 になったんだよね。
>
> 太郎：わっ，本当だ。計算してみたら X の値は 1 になるね。

(7) $\triangle$ABC について，次の条件 p，q を考える。

$p：A=60°$

$q：4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$

これまでの太郎さんと花子さんが行った考察をもとに，正しいと判断できるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。[サ]

⓪ p は q であるための必要十分条件である。

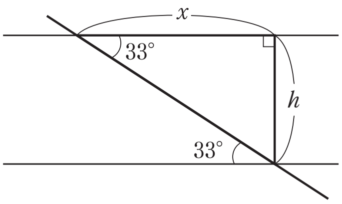
① p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。

② p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない。

③ p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

第３講　図形と計量

1　〔1〕　階段の傾斜が 33° のとき，踏面を $x$cm，蹴上げを $h$cm とすると



$\dfrac{h}{x}=\tan 33°$ より $h=x\tan 33°$

蹴上げが 18cm 以下となるのは $x\tan 33°\leqq 18$

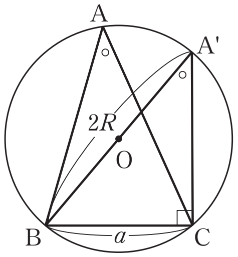
よって，$x\leqq\dfrac{18}{\tan 33°}$

建築基準法より，踏面は 26cm 以上と定められているので $x\geqq 26$

したがって，x のとり得る値の範囲は $26\leqq x\leqq\dfrac{18}{\tan 33°}$

〔2〕

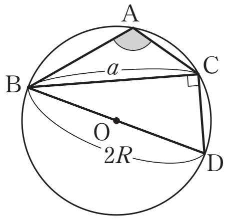
(1)　直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点(①)を A′ とすると，△A′BC に対して $C=90°$ の場合の考察の結果を利用することができ，$\dfrac{a}{\sin\angle \mathrm{CA'B}}=2R$ である。



これと，$\angle \mathrm{CAB}=\angle \mathrm{CA'B}$ より，$\dfrac{a}{\sin\angle \mathrm{CAB}}=2R$

つまり，△ABC において $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つ。

(2)　△BCD において，$\sin\angle \mathrm{BDC}=\dfrac{a}{2R}$　(⑤)



四角形 ABDC は円 O に内接するから

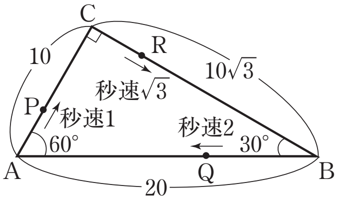
$\angle \mathrm{CAB}=180°-\angle \mathrm{BDC}$　(⑤)

よって，$\sin\angle \mathrm{CAB}=\sin(180°-\angle \mathrm{BDC})=\sin\angle \mathrm{BDC}$

より △ABC において $\sin\angle \mathrm{CAB}=\dfrac{a}{2R}$

2　(1)　図1の △ABC において，$\mathrm{AC}=10$，$\mathrm{BC}=10\sqrt{3}$ である。

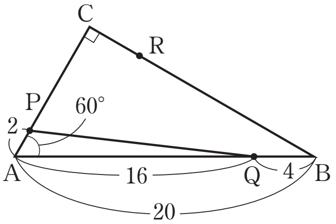
点 P は $\mathrm{AC}=10$ である辺 AC 上を点 A から点 C まで秒速 1 で移動する。



点 Q は $\mathrm{BA}=20$ である辺 BA 上を点 B から点 A まで，点 R は $\mathrm{CB}=10\sqrt{3}$ である辺 CB 上を点 C から点 B まで移動し，点 P，Q，R は同時

に移動を開始し，同時に到着することから，点Qの速さは秒速2，点Rの速さは秒速$\sqrt{3}$である。

(i)　各点が移動を開始して2秒後は，$AP=2$，



$BQ=4$であることより$AQ=16$

$\triangle APQ$で余弦定理を用いて

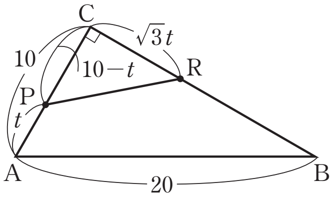
$$PQ^2=2^2+16^2-2\cdot2\cdot16\cdot\cos60^\circ$$

$$=2^2\left(1^2+8^2-2\cdot1\cdot8\cdot\frac{1}{2}\right)=2^2\cdot57$$

よって，$PQ=2\sqrt{57}$

また，$\triangle APQ$の面積Sについて，$S=\frac{1}{2}\cdot16\cdot2\cdot\sin60^\circ=8\sqrt{3}$

(ii)　各点が移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$は，



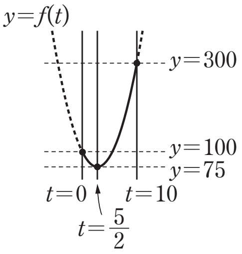
$AP=t$より$CP=10-t$，$CR=\sqrt{3}\,t$

$\triangle PCR$で三平方の定理より

$$PR^2=(10-t)^2+\left(\sqrt{3}\,t\right)^2=4t^2-20t+100$$

$$=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+75$$

$PR^2=f(t)$とおくと，$0\leqq t\leqq10$における$y=f(t)$のグラフは右図。



⓪　$PR=5\sqrt{2}$のとき$PR^2=50$　よって，$PR=5\sqrt{2}$はとり得ない値である。

①　$PR=5\sqrt{3}$のとき$PR^2=75$　よって$PR=5\sqrt{3}$は一回だけとり得る値である。

②　$PR=4\sqrt{5}$のとき$PR^2=80$　よって$PR=4\sqrt{5}$は二回だけとり得る値である。

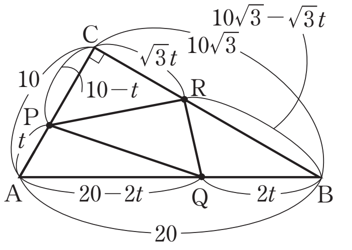
③　$PR=10$のとき$PR^2=100$　よって$PR=10$は二回だけとり得る値である。

④　$PR=10\sqrt{3}$のとき$PR^2=300$　よって$PR=10\sqrt{3}$は一回だけとり得る値である。

以上より　とり得ない値　⓪　　　一回だけとり得る値　①，④

二回だけとり得る値　②，③

(iii)　各点が移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$は



$AP=t$より$PC=10-t$

$BQ=2t$より$QA=20-2t=2(10-t)$

$CR=\sqrt{3}\,t$より$RB=10\sqrt{3}-\sqrt{3}\,t$

$=\sqrt{3}(10-t)$

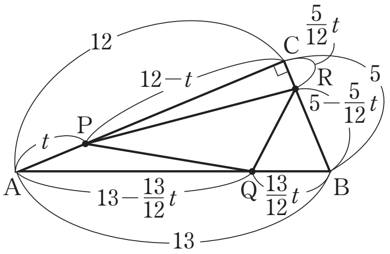
$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot 2(10-t)\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}(10-t)\cdot 2t\cdot\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot(10-t)\cdot\sqrt{3}\,t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$

(2)　各点が移動を開始して t 秒後 $(0\leqq t\leqq 12)$ は



$\mathrm{AP}=t$ より $\mathrm{PC}=12-t$

$\mathrm{BQ}=\dfrac{13}{12}t$ より

$\mathrm{QA}=13-\dfrac{13}{12}t=\dfrac{13}{12}(12-t)$

$\mathrm{CR}=\dfrac{5}{12}t$ より $\mathrm{RB}=5-\dfrac{5}{12}t=\dfrac{5}{12}(12-t)$

$\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\sin B=\dfrac{12}{13}$

(1)(iii)と同様に △APQ，△BQR，△CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot t\cdot\dfrac{13}{12}(12-t)\cdot\sin A=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{13}{12}t\cdot\dfrac{5}{12}(12-t)\cdot\sin B=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot(12-t)\cdot\dfrac{5}{12}t=\dfrac{5}{24}t(12-t)$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$ である。

また，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=30$ であることから，$\triangle\mathrm{PQR}=12$ となるのは

$S_1+S_2+S_3=30-12=18$　すなわち $3\times\dfrac{5}{24}t(12-t)=18$ のときである。

$5t^2-60t+144=0$　　$t=\dfrac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}$　$(0\leqq t\leqq 12$ を満たす$)$

よって，$\dfrac{30\pm 6\sqrt{5}}{5}$ 秒後

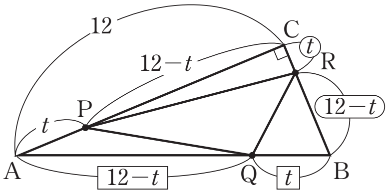
(別解)

$\mathrm{AP}=t$，$\mathrm{PC}=12-t$，$\mathrm{BQ}=\dfrac{13}{12}t$，$\mathrm{QA}=\dfrac{13}{12}(12-t)$，$\mathrm{CR}=\dfrac{5}{12}t$，

$\mathrm{RB}=\dfrac{5}{12}(12-t)$ より

AP：PC＝BQ：QA＝CR：RB＝t：$(12-t)$

(1)(iii)と同様に，△APQ，△BQR，△CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とすると



$$S_1=\triangle ABC\times\frac{AP}{AC}\times\frac{AQ}{AB}$$

$$=\triangle ABC\times\frac{t}{12}\times\frac{12-t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

$$S_2=\triangle ABC\times\frac{BQ}{BA}\times\frac{BR}{BC}=\triangle ABC\times\frac{t}{12}\times\frac{12-t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

$$S_3=\triangle ABC\times\frac{CP}{CA}\times\frac{CR}{CB}=\triangle ABC\times\frac{12-t}{12}\times\frac{t}{12}=\frac{t(12-t)}{12^2}\triangle ABC$$

よって，時刻によらず $S_1=S_2=S_3$ である（以下略）

3 (1)　$A=60°$，$B=90°$ のとき，$C=30°$

よって，$\cos B=\cos 90°=0$（⓪），$\sin C=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$（③）

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\cdot 0+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\sqrt{3}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=1$$

(2)　$A=60°$，$B=13°$ のとき，$C=107°$

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$（④）より，$\sin C=\sin 107°=\sin(180°-73°)=\sin 73°$

$0<\sin 73°<1$ より，選択肢⓪〜③のうち，$\sin 73°$ の値として適切なものは $\sin 73°=0.9563$（②）のみである。

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\times 0.9744^2+4\times 0.9563^2-4\times 1.732\times 0.9744\times 0.9563$$

$$=3.79782144+3.65803876-6.45564009$$

$$=1.00022011$$

小数第 4 位を四捨五入すると $X=1.000$

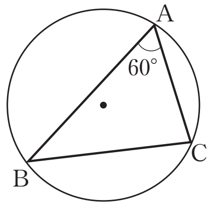
(3)　近似値を用いて計算し，かつ四捨五入した結果が $X=1$ になったに過ぎないので，$A=60°$，$B=13°$ のときに $X=1$ になることが証明できた，とする(a)は誤りである。

仮に，$A=60°$，$B=13°$ のときに $X=1$ になることが証明できたとしても，$A=60°$ のときのすべての場合において証明できたことにはならない。よって，$A=60°$ ならば $X=1$ という命題が真であると証明できた，とする(b)は誤りである。

したがって，(a)，(b)の正誤の組合せとして正しいのは，下線部(a)，(b)ともに誤りで

ある（③）

(4)　△ABC で正弦定理を用いて



$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$ より $\mathrm{BC}=2R\sin 60^\circ=2R\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}R$

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=2R$ より $\mathrm{AB}=2R\sin C$（⑤），

$\mathrm{AC}=2R\sin B$（①）

(5)　直角三角形 ACH で，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AC}}=\cos 60^\circ$ より，$\mathrm{AH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ$

直角三角形 BCH で，$\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BC}}=\cos B$ より，$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\cos B$

$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{BH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ+\mathrm{BC}\cos B$

$=2R\sin B\cdot\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}R\cos B$

よって，$\mathrm{AB}=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B$ ……④

（③）　（⑤）

$X=1$，すなわち $4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$ であることを証明する。

④および $\mathrm{AB}=2R\sin C$ より $2R\sin C=R\sin B+\sqrt{3}R\cos B$

両辺を $R(\neq 0)$ で割って

$2\sin C=\sin B+\sqrt{3}\cos B$　すなわち $2\sin C-\sqrt{3}\cos B=\sin B$

両辺を 2 乗して

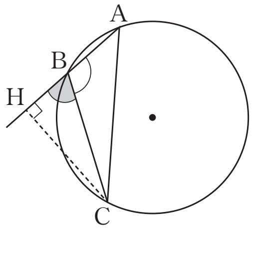
$4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C+3\cos^2 B=\sin^2 B$

両辺に $\cos^2 B$ を加えて

$4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C+4\cos^2 B=\sin^2 B+\cos^2 B$

ゆえに，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C=1$ である。

(6)　B が鈍角のとき，点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと，点 H は辺 AB 上にはない。これにより，下線部①には影響ないが，



下線部②は $\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{CBH}$

$=\mathrm{BC}\cos(180^\circ-B)$

$=-\mathrm{BC}\cos B$

下線部③は $\mathrm{AB}=\mathrm{AH}-\mathrm{BH}$

に，それぞれ修正が必要である。

このとき，$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}-\mathrm{BH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ+\mathrm{BC}\cos B$ となり，以下，B が鋭角のときと同様に $X=1$ であることが示される。

(7)　$A=120^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，$C=30^\circ$

このとき，$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$

$$=4\cos^2 30^\circ+4\sin^2 30^\circ-4\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$=4(\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ)-4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=4\cdot 1-3=1$$

より，$A=120^\circ$，$B=30^\circ$ のとき $X=1$ となる。

　$A=60^\circ$ ならば，B が 90°，鋭角，鈍角いずれの場合も $X=1$ であることが示されている（C は A，B が決まれば１つに決まる）ので，△ABC について，$p \Longrightarrow q$ は真である。

また，$A=120^\circ$ のときにも $X=1$ になることが示されているので，$p \Longleftarrow q$ は偽である。

したがって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない（②）